**Відповіді та розв’язання**

**6 клас**

1. **Відповідь:** №3- вермішель, №1 – цукор, №2 – крупа.
2. **Відповідь:** . *Вказівка:* запишіть даний дріб у вигляді .
3. Один із варіантів розташування чисел наведено на рисунку

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 6 | 7 |
| 2 | 5 | 8 |
| 3 | 4 | 9 |

**4. *Відповідь***: 8 драконів.

*Розв’язання*:

З умови зрозуміло, що Король - семиголовий дракон. Віднімемо від 25 голів, підрахованих Королем драконів, 6 голів, що належать йому. Залишиться 19 голів. Усі дракони, що залишилися, не можуть бути двоголовими (оскільки 19 - непарне число). Семиголовий дракон може бути тільки 1 (Якщо 2, то для двоголових залишиться непарна кількість голів, а для 3 семиголових драконів голів не вистачає: 7х3 = 21 > 19). Віднімемо від 19 голів 7 і отримаємо загальну кількість голів, що належать двоголовим драконам. Отже, двоголових драконів було (19 - 7) : 2 = 6. Всього драконів: 6 +1 +1(Король) = 8 драконів.

**5. *Відповідь:***Олівець дорожчий за ручку.

*Вказівка.* Замінюючи в другому твердженні зошит на олівець та ручку, отримуємо, що два олівця та ручка дорожчі за три ручки.

**6.** Першим зважуванням порівняємо маси будь-яких двох монет. Залежно від результату цього зважування подальші кроки будуть такими:

а)*Терези у рівновазі.*

Обрані навмання монети мають рівні маси. Отже, вони справжні. Залишимо одну з них на терезах, а на іншу шальку покладемо одну з монет, які не використовували у першому зважуванні. Якщо терези врівноважилися, то маса третьої монети не відрізняється від справжньої і фальшивою є четверта монета. Якщо під час другого зважування терези не врівноважилися, то маса третьої монети відрізняється від справжньої, і ця монета – фальшива.

б)*Терези після першого зважування не врівноважилися.*

Одна з двох монет, що на терезах фальшива, а дві інші – справжні. Знімемо з терезів одну з двох перших монет і покладемо замість неї справжню. Якщо терези в рівновазі, то фальшивою є та, яку зняли. Якщо ні, то фальшивою є та монета, яка була на терезах під час першого та другого зважувань.

**7 клас**

**1. *Відповідь:*** 8.

*Розв’язання.*Сума цифр числа дорівнює 25 + \*. Щоб число ділилося на 3, треба замість зірочки поставити одну з цифр {2; 5; 8}. Якщо поставити цифру 2, то число буде кратним 9; якщо поставити 5, воно не буде ділитися на 6; якщо поставити цифру 8, маємо число 975 318 - задовольняє умову задачі.

**2. *Відповідь***: 8 драконів.

*Розв’язання*. Зрозуміло, що Король - семиголовий дракон. Віднімемо від 25 голів, підрахованих Королем драконів, 6 голів, що належать йому. Залишиться 19 голів. Усі дракони, що залишилися, не можуть бути двоголовими (оскільки 19 - непарне число). Семиголовий дракон може бути тільки 1 (Якщо 2, то для двоголових залишиться непарна кількість голів, а для 3 семиголових драконів голів не вистачає: 7х3 = 21 > 19). Віднімемо від 19 голів 7 і отримаємо загальну кількість голів, що належать двоголовим драконам. Отже, двоголових драконів було (19 - 7) : 2 = 6. Всього драконів: 6 +1 +1(Король) = 8 драконів.

1. ***Відповідь:*** 12  83 = 1068.

**4. *Відповідь***: 1,5 хвилини.

*Розв’язання*:

Так як 60 : 45 = , то в другому випадку за хвилину можна було б пройти  ескалатора, тобто на  більше, ніж у першому випадку. Це відбувається через збільшення швидкості в два рази. Тобто за хвилину в першому випадку людина проходить ескалатора. Тоді, якщо стояти на ескалаторі, спуск займе  хвилини.

5.***Відповідь*:** 18 грн. *Порада*. Схематично подавши умову задачі бачимо, що половина грошей останньої суми дорівнює 1 грн., тобто перед зустріччю з останнім продавцем селянин мав 2 грн. Це сума, яку було сплачено другому продавцеві, без 2 грн., тобто, перед зустріччю з ним селянин мав 2(2 +2) = 8 грн. Це гроші, сплачені першому продавцеві без 1 грн. Отже, спочатку селянин мав  (8 + 1) = 18 грн.

**6.** *Розв’язання.*Для того щоб, згідно з правилами гри, перший учень виграв, на останньому *k* –му своєму кроці він повинен залишити 1 олівець (для другого). Для того, щоб йому це вдалося, на передостанньому – (*k* -1) -му кроці він повинен залишити для другого 5 олівців:

- якщо другий учень на (*k* -1) -му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому *k* -му кроці повинен взяти 3 олівця;

- якщо другий учень на (*k* - 1) -му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому *k* -му кроці повинен взяти 2 олівця;

- якщо другий учень на (*k* -1) -му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому *k* -му кроці повинен взяти 1 олівець.

Так само, для того, щоб після (*k* -1) -го кроку першому вдалося залишити для другого 5 олівців, після (*k*  - 2) -го кроку перший повинен залишити для другого 9 олівців:

- якщо другий учень на (*k* - 2) -му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому *k* -му кроці повинен взяти 3 олівця;

- якщо другий учень на (*k* - 2) -му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому (*k* -1) -му кроці повинен взяти 2 олівця;

- якщо другий учень на (*k*  - 2) -му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому (*k* -1) -му кроці повинен взяти 1 олівець.

Продовжуючи вказані міркування маємо, що перший учень для гарантованого виграшу в даній грі повинен залишати після себе «в зворотному напрямку» 1; 5; 9; 13; 17 олівців.

Отже, перший учень, щоб виграти, повинен грати наступним чином:

**першого разу** він повинен взяти 1 олівець (бо 1 – це остача від ділення числа 17=18-1 на число 4).

**при кожному наступному виборі** керуватися правилом:

- якщо другий візьме 1 олівець, то перший повинен взяти 3 олівці,

- якщо другий візьме 2 олівці, то перший повинен взяти 2 олівці,

- якщо другий візьме 3 олівці, то перший повинен взяти 1 олівець».

**8 клас**

1. ***Відповідь***: 𝑥=6. *Вказівка.* Твердження 2𝑥>70, 𝑥>10 та 4𝑥>25 не можуть бути істинними, оскільки в противному випадку кількість істинних тверджень більше двох. Тому твердження 𝑥>5 та 𝑥≤6,25 – істинні. А оскільки 𝑥 – натуральне, то 𝑥=6.

**2. *Відповідь:*** .*Вказівка.*

 .

**3. Відповідь:** 3025 = 552. *Вказівка*. Приміть до уваги, що остання цифра квадрата цілого числа не може бути 2 або 3; квадрат не може закінчуватися одним нулем.

**4***.Розв’язання.*

**5. *Відповідь:*** Джон мешкає в 217-ой квартирі.

*Розв’язання.* Нехай *x* – номер квартири Джона. Тоді номер його поверху дорівнює 239 – *х*. Частка від ділення з остачею номера квартири на 10 дорівнює номеру попереднього поверху, тому , де .

Перетворюючи одержане рівняння, одержимо: ; .

Оскільки *x* є натуральним числом, тоді , тому .

**6.** ***Розв’язання*.** Позначимо точку перетину  та  через  (рис. 1). Оскільки , то у  відрізок  є бісектрисою та висотою одночасно, тому , тому , тому у трикутнику  відрізок  є одночасно висотою та медіаною, тому він рівнобедрений, тобто .













**Рис. 1**

7. ***Відповідь***: 9 клітинок. *Розв’язання*. З умови мінімальності повинна буди зафарбована центральна клітинка (рис. 2). Розглянемо два квадрати 4х4, виділені на малюнку. Їх спільна клітинка вже зафарбована. Оскільки в кожному з них треба зафарбувати рівно 5 клітинок, то, крім спільної, в кожному з них треба зафарбувати ще по 4 клітинки. Тобто найменша кількість зафарбованих клітинок: 1+4+4=9. Приклад такого розфарбування на малюнку.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Рис. 2

1. **клас**
2. 𝑥=6. *Вказівка.* Твердження 2𝑥>70, 𝑥>10 та 4𝑥>25 не можуть бути істинними, оскільки в противному випадку кількість істинних тверджень більше двох. Тому твердження 𝑥>5 та 𝑥≤6,25 – істинні. А оскільки 𝑥 – натуральне, то 𝑥=6.
3. ***Відповідь*:** . *Вказівка.* , тоді задане рівняння можна переписати як:



1. **Відповідь**: . *Вказівка*. Запишіть даний дріб у вигляді .
2. **.** *Доведення.* Нехай 2013= *n*, тоді



1. **Відповідь:** 3. *Розв’язання.* Позначимо кількістьдітей 10, 11, 12 і 13 років відповідно як *x*, *y*, *z*, *t*. Маємо:

, , .

З другого рівняння системи шукане значення . Перевіркою переконуємося, що .

**6.**  ***Відповідь:*** . *Розв’язання*. З формул площі трикутника та паралелограма очевидно, що  (рис. 3). Оскільки  – медіана , тому  – точка перетину медіан , а тому також медіана цього трикутника, звідки .

**Рис. 3**

















**5. *Відповідь***: 2016.

*Розв’язання*:

Розглянемо порядкові номери коробок. До кожної коробки (починаючи з другої) хлопчик підходить стільки разів, скільки у її номера дільників, відмінних від 1. Якщо номер коробки має парну кількість дільників відмінних від 1, то в результаті виконаних дій стан коробки не зміниться, тобто коробка залишиться відритою. Якщо ж номер коробки має непарну кількість дільників відмінних від 1, то стан коробки зміниться – вона буде закритою. Відомо, що непарну кількість дільників мають тільки числа, що є повними квадратами. Отже, відкритими залишаться ті коробки, порядковий номер яких є повним квадратом. Тому для знаходження відповіді необхідно підрахувати кількість повних квадратів серед чисел від 1 до 20162, а таких чисел 2016.

1. **клас**
2. ***Відповідь*:** . *Вказівка.*Дане рівняння рівносильно

.

1. ***Відповідь:*** *а* = 13. *Вказівка*. На шукане *а* ділиться і добуток даних чисел на довільне число та різниця таких добутків, тобто . Тоді .
2. ***Відповідь***: *Розв’язання*: 1)  , . 2) , . 3)    4) Дана функція має вигляд Отже, 
3. **Відповідь:** 3. *Вказівка.* Позначимо кількістьдітей 10, 11, 12 і 13 років відповідно як *x*, *y*, *z*, *t*. Маємо:

, , .

З другого рівняння системи шукане значення . Перевіркою переконуємося, що .

**5.**  ***Відповідь:*** . *Розв’язання*. З формул площі трикутника та паралелограма очевидно, що  (рис. 3). Оскільки  – медіана , тому  – точка перетину медіан , а тому також медіана цього трикутника, звідки .

**Рис. 3**

















**6.** ***Розв’язання*.** Позначимо середину сторони  через , проведемо промені  та , які паралельні відповідно прямим  та , які перетинаються у точці  (рис. 4). Зрозуміло за побудовою, що  – прямокутний. Тоді  – серединний перпендикуляр до , а  – серединний перпендикуляр до , тому , , звідки , що й треба було довести.

**Рис. 4**













**5. *Відповідь*:** *а*1 належить інтервалу (-2016; -2015).

Оскільки різниця прогресії додатня, то прогресія —зростаюча. Значить, описана ситуація можлива тоді і тільки тоді, коли члени прогресії з першого по 2016-ий — від’ємні, а починаючи з 2017-ого — додатні. Таким чином, S2016 буде наименьшою, тоді і тільки тоді, коли *а*2016<0, а *а*2017>0 . Звідси отримуємо систему нерівностей

. Отже, отримуємо (-2016; -2015).

1. **лас**
2. ***Відповідь*:** .*Вказівка.*Дане нерівність рівносильна

.

1. ***Відповідь:*** *а* = 13. *Вказівка*. На шукане *а* ділиться і добуток даних чисел на довільне число та різниця таких добутків, тобто . Тоді .
2. **Відповідь:** 3. *Вказівка.* Позначимо кількістьдітей 10, 11, 12 і 13 років відповідно як *x*, *y*, *z*, *t*. Маємо:

, , .

З другого рівняння системи шукане значення . Перевіркою переконуємося, що .

1. ***Відповідь***: 8 першокласників. *Розв’язання*. 1) Ніхто з першокласників, які мали написати слово «брак», не виконав завдання правильно (жоден учень не знає одночасно і букви «р» і «б»). Ці учні написали або «бак», або «рак». Тоді правильно написали свої слова деякі з 10 + 18 = 28 учнів, які мали написати слово «бак» або «рак». 2) Маємо, що були написані лише слова «бак», «рак» та «ак». Перші два слова написали по 15 разів. Тоді «ак» написали 50 – 15 – 15 = 20 першокласників. 3) Решта 28 – 20 = 8 першокласників виконали завдання правильно.

5. ***Розв’язання*.** Позначимо середину сторони  через , проведемо промені  та , які паралельні відповідно прямим  та , які перетинаються у точці  (рис. 4). Зрозуміло за побудовою, що  – прямокутний. Тоді  – серединний перпендикуляр до , а  – серединний перпендикуляр до , тому , , звідки , що й треба було довести.

**Рис. 4**













**4.** ***Відповідь:*** .

*Розв’язання*. При  маємо . При  маємо , . Перевіркою переконуємось, що ця функція задовольняє умову.

**5.** ***Відповідь:*** . *Розв’язання.* Розглянемо переріз  даного параллелепипеда . Нехай – точка перетину диагоналей квадрата . Трикутник  - рівнобедрений,  - его высота. Нехай – точка перетину діагоналей параллелепипеда,  - перпендикуляр до (). З того, що всі діагоналі прямокутного паралелепіпеду рівні, випливає, що точка  рівновіддалена від вершин трикугника . Тому  - центр описаного навколо нього кола. З того, що цей трикутник гострокутний і рівнобедрений маємо, що точка  належить відрізку . Кутом між () і () є гострий кут  між () та її ортогональною проекцією на (), тобто кут .

Нехай , . Тоді . Довжину відрізка  знайдемо з розгляду прямокутника , де  - точка перетину діагоналей квадрата . З подібності прямокутних трикутників  і  маємо, що . З того, що , , отримаємо .Тоді .

Міра гострого кута буде найбільшою, коли буде найбільшим значення . З нерівності для двох взаємно обернених величин маємо , до того рівність досягається у випадку *a*=*b*. Тоді . Найбільше значення кута  відповідає випадку, коли даний паралелепіпед є кубом.